随伴多様体の射影幾何的魅力(部分多様体の微分幾何学)

楫, 元

数理解析研究所講究録 1460 巻 2005 年 23-32

随伴多様体の射影幾何的魅力

早稲田大学 理工学部　梶　元 (KAJI, Hajime)
School of Science and Engineering,
Waseda University

§0. 序

複素単純 Lie環 $\mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{g}$ を Lie環にもつ単連結複素単純代数群 G の, 随伴表現 $\mathrm{Ad}: G \curvearrowright \mathfrak{g}$ から引き起こされる複素射影空間 $\mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ への作用を考える. その唯一の閉軌道, つまり, 非自明な極小ベキ零軌道 $\mathcal{O}_{\min} \subseteq \mathfrak{g}$ の射影化を, $X(\mathfrak{g})$ で表し, $\mathfrak{g}$ から定まる 随伴多様体 (adjoint variety) と呼ぶこととする:

$$X(\mathfrak{g}) := \pi(\mathcal{O}_{\min}) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}).$$

ただし, $\pi : \mathfrak{g} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ は自然な射影である. $X(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ は非特異かつ非退化な (つまり, どんな超平面にも含まれない) 射影多様体となる.

本稿では, 随伴多様体に対する射影代数幾何的興味が (筆者の心に) 涌いてくる背景を説明し, 随伴多様体のもつ射影幾何的性質をいくつか紹介したい.

§1. 背景

非特異射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して, 点 $P \in \mathbb{P}^N \setminus X$ からの射影[1]は, 射 $\pi_P : X \to \mathbb{P}^{N-1}$ を定める. このとき,

問題1: 一般の位置にある点 P に対して $\pi_P : X \to \pi_P(X)$ は同型となるか?

を考える. 以下, 自明な射影を排除するために X は非退化と仮定しよう.

この問題を考察するには, "secant variety" に着目するとよい: 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して, 2点 $x, y \in X$ を結ぶ射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の (複素射影) 直線を $\overline{xy}$ で表し, X の secant line と呼ぶ. また, 点 $x \in X$ において X に接する $\mathbb{P}^N$ の線型部分空間で X と等次元のものを T_xX で表し, X の x における embedded tangent space と呼ぶ. このとき, 任意の $x, y \in X$ に対して,

(1) $\pi_P(x) = \pi_P(y) \Leftrightarrow P \in \overline{xy}$;
(2) $\mathrm{rk}(d\pi_P)_x < \dim X \Leftrightarrow P \in T_xX$;

[1]点 $P \in \mathbb{P}^N$ からの射影とは, P を含まない $\mathbb{P}^N$ の超平面 H をひとつ固定したときの, 点 $Q \in \mathbb{P}^N \setminus \{P\}$ に対して P, Q を結ぶ複素射影直線 $\overline{PQ}$ と H との交点 $\pi(Q) := \overline{PQ} \cap H$ を対応させる写像 π のこと. 同型 $H \simeq \mathbb{P}^{N-1}$ により, $\pi : \mathbb{P}^N \setminus \{P\} \to \mathbb{P}^{N-1}$ と考える.

が成り立つ. ここで, secant line すべての和集合の閉包を

$$\operatorname{Sec} X := \overline{\bigcup_{x,y\in X, x\neq y} \overline{xy}} \subseteq \mathbb{P}^N$$

とおくと, X が非特異であることから $\operatorname{Sec} X = \bigcup_{x,y\in X,x\neq y} \overline{xy} \cup \bigcup_{x\in X} T_x X$ が成り立ち,

$$\pi_P : X \to \pi_P(X)\text{: 同型} \quad \Leftrightarrow \quad P \in \mathbb{P}^N \setminus \operatorname{Sec} X$$

が導かれる. $\operatorname{Sec} X$ を X の secant variety と呼ぶ.

したがって, 問題1の答は, $\operatorname{Sec} X \neq \mathbb{P}^N$ のとき, そして, そのときに限り yes である. 任意の射影多様体 X に対して, $\dim X = n$ ならば $\dim \operatorname{Sec} X \leq 2n+1$ となることが定義より見て取れるので, たとえば, $N > 2n+1$ ならば問題1の答は yes である.

では, $N \leq 2n+1$ のときはどうか? $N = 5, n = 2$ の場合は, 次の古典的結果がある:

定理1 (F. Severi (1901) [**17**]): 非特異かつ非退化射影曲面 $S \subseteq \mathbb{P}^5$ に対して, 次は同値である:

(1) 一般の位置にある点 $P \in \mathbb{P}^5$ に対して $\pi_P : S \to \pi_P(S)$ は同型となる.
(2) S は Veronese 曲面, $v_2(\mathbb{P}^2)$ と射影的同値である. ただし,

$$v_2 : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5; (x:y:z) \mapsto (x^2 : y^2 : z^2 : yz : zx : xy).$$

一般には, 次が知られている (これは, R. Hartshorne の linear normality に関する予想[2][**8**] の肯定的解決でもあるが, ここでは深くは触れない):

定理2 (F. Zak (1979) [**19**]): 非特異かつ非退化射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して, $\operatorname{Sec} X \neq \mathbb{P}^N$ ならば $3n+4 \leq 2N$ が成り立つ.

[2]「非特異射影多様体 $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ に対して, $n = \dim Y$ とするとき $3n > 2(m-1)$ ならば, Y は linearly normalとなる?」という予想. ここで, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ が linearly normal とは, 非退化非特異射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^{m+1}$ の同型な射影の像として Y が得られないこと, と定義される. 超平面切断束の言葉で言うと, $H^0(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}(1)) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(1))$ が全射であるということ.

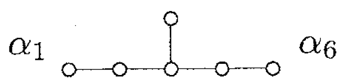
では, 極端な場合として, 定理の不等号において等号が成立するのはどんな射影多様体だろうか? Severi の定理は, $n=2$ の場合の分類ないし特徴づけを与えている. それに因んで, 2条件,

$$\operatorname{Sec} X \neq \mathbb{P}^N, \quad 3n+4=2N$$

をみたす非特異かつ非退化射影多様体 $X^n \subseteq \mathbb{P}^N$ を Severi多様体 と呼ぶ. Zak により, 次のように分類された:

定理3 (Zak (1981) [**19**]): Severi多様体は次のいずれかと射影的同値である:

(1) $v_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5$: Veronese 曲面.
(2) $\sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^8$: Segre多様体.
(3) $\mathbb{G}(2,6) \subseteq \mathbb{P}^{14}$: Grassmann多様体 via Plücker embedding.
(4) $E_6(\omega_i) \subseteq \mathbb{P}^{26}$: '$E_6$-多様体' $(i=1,6)$. ただし, ω_1, ω_6 は, Dynkin図形



の両端の頂点に対応する単純ルート α_1, α_6 の, Killing形式に関して双対となる基本ウェイト; $E_6(\lambda)$ は, E_6-型代数群 G の, λ を最高ウェイトにもつ表現 $V(\lambda)$ から定まる作用 $G \curvearrowright \mathbb{P}_*(V(\lambda))$ の唯一の閉軌道として得られる射影多様体を表す.

ここで注目すべきは, (4) の E_6-多様体 だけでなく, (1)–(3) も適当な代数群の表現から得られる等質射影多様体ということである.

さて, $\operatorname{Sec} X$ の '期待される次元' $2n+1$ から実際の次元を引いた値,

$$\delta := 2n+1-\dim \operatorname{Sec} X$$

を, X の secant defect (または secant deficiency) と呼ぶ. Severi多様体に対しては, その secant variety は余次元1となるので,[3] それぞれ $\delta = 1,2,4,8$ となることがわかる. Zak による Severi多様体の分類から, 次が提起された:

問題2 (R. Lazarsfeld-A. Van de Ven (1984) [**15**]): $\operatorname{Sec} X \neq \mathbb{P}^N$ となる非特異かつ非退化射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の secant defect δ は, いくらでも大きい値を取り得るか?

[3]余次元が2以上とすると, $P \in \mathbb{P}^N \setminus \operatorname{Sec} X$ からの射影 π を考えると, $\pi(X) \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$ は, 非特異かつ非退化な射影多様体で $\operatorname{Sec} \pi(X) = \pi(\operatorname{Sec} X) \neq \mathbb{P}^{N-1}$ となるので, Zakの不等式 (定理2) に反する.

結局, $\delta > 8$ となる射影多様体の存在が問題となる. secant defect に関しては次が重要である:

定理4 (A. Terracini (1911) [**18**]): 点 $x, y \in X$ および $z \in \overline{xy}$ が一般の位置にあるならば,

$$T_z \operatorname{Sec} X = \langle T_x X, T_y X \rangle$$

が成り立つ. ただし, $\langle *, * \rangle$ は, $*$ たちの張る線型部分空間を表す.

これより $\dim \operatorname{Sec} X = \dim \langle T_x X, T_y X \rangle = 2n - \dim T_x X \cap T_y X$ となり,

$$\delta = \dim T_x X \cap T_y X + 1$$

という公式を得る. Lazarsfeld-Van de Ven の問題は未解決であるが, 分類の結果, Severi 多様体がすべて等質となることに注目して, 問題を等質射影多様体に限定してみる.

ここで, きちんと等質射影多様体の定義を与える: 半単純[4]代数群 G とその有限次元表現 V に対して, 自然に定まる G の $\mathbb{P}_*(V)$ への作用そ考え, その閉軌道を<u>等質射影多様体</u>と呼ぶ.

G が単純代数群であり V が既約表現の場合, この公式をウェイトの言葉で言い換えると次を得る: λ, μ をそれぞれ V の最高ウェイトと最低ウェイト, $\tilde{\alpha}$ を最高ルートとすれば

定理5 (K (1995) [**9**]): $\kappa(\lambda - \mu, \lambda - \tilde{\alpha}) > 0 \Rightarrow \delta = 0$.

ただし, $\kappa(*, *)$ は Killing形式である.

定理6 (Zak (1993) [**15**], [**19**]) G が単純ではない等質射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$に対して,

(1) $\delta > 0 \Leftrightarrow X = \sigma(\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b) \subseteq \mathbb{P}^{ab+a+b}$.
(2) $\operatorname{Sec} X = \mathbb{P}^N \Leftrightarrow X = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}) \subseteq \mathbb{P}^{2n-1}$ または $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^{n-1}) \subseteq \mathbb{P}^{2n+1}$ となる. ただし, $\mathbb{Q}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^n$ は2次超曲面.

定理5, 6 および後述の定理Aにより, 次を得る:

系: 等質射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して, 非退化で $\operatorname{Sec} X \neq \mathbb{P}^N$ かつ $\delta > 0$ となるならば, X は次のいずれかであり, また, 逆も成り立つ:

(1) $v_2(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^N$ $(n \geq 2), N + 1 = \binom{n+2}{n}$; $\delta = 1$.

---

[4]軌道の射影化に興味があるので, 半単純性を仮定しても一般性を失わない.

(2) $\sigma(\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b) \subseteq \mathbb{P}^N$ $(a, b \geq 2), N+1 = (a+1)(b+1)$; $\delta = 2$.
(3) $\mathbb{G}(2, m) \subseteq \mathbb{P}^N$ $(m \geq 4), N+1 = \binom{m}{2}$; $\delta = 4$.
(4) $E_6(\omega_i) \subseteq \mathbb{P}^{26}$ $(i = 1, 6)$; $\delta = 8$.
(5) (2), (3), (4) に現れる X'の超平面切断, $\delta = \delta' - 1$.
(6) 随伴多様体 $X(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ $(\mathrm{rk}\,\mathfrak{g} > 1)$; $\delta = 1$.

結果, 古典的に知られていたVeronese多様体, Segre多様体, Grasmann多様体およびZakによるSeveri多様体の分類に現れた E_6-多様体, それらの超平面切断に加えて, 新しい系列として随伴多様体が現れる: とくに, $\delta \leq 8$ となることが見て取れ, 上記の問題の答は, 等質射影多様体に対しては no であることがわかる [**9**].

§2. 随伴多様体

まず, 古典型の $\mathfrak{g}$ に対する随伴多様体の具体的形は, 以下の通り: A型については, Segre多様体の超平面切断となる: $X(\mathfrak{sl}_m) = \sigma(\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{m-1}) \cap (1) \subseteq \mathbb{P}^{m^2-2}$. 次に BD型の場合は, 直交Grassmann多様体となる: $X(\mathfrak{so}_m) = \mathbb{G}_{\mathrm{orthog.}}(2, m) \subseteq \mathbb{P}^{\binom{m}{2}-1}$. つまり, 2次超曲面に含まれる直線のなすFano多様体で, Grassmann多様体 $\mathbb{G}(2, m)$ 内で余次元3となる. 最後に C型の場合は, Veronese多様体となる: $X(\mathfrak{sp}_{2m}) = v_2\mathbb{P}^{2m-1} \subseteq \mathbb{P}^{\binom{2m+1}{2}-1}$. 例外型の場合の随伴多様体の次元を挙げると, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 に対して, それぞれ, $21, 33, 57, 15, 5$ となる.

以下, 随伴多様体の射影幾何的性質を幾つか挙げる:

定理A (K-大野真裕-保倉理美 (1995) [**10**]): 随伴多様体 $X(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ に対しては, 次が成り立つ.

(1) $\dim \mathrm{Sec}\, X(\mathfrak{g}) = 2 \dim X(\mathfrak{g})$, つまり, $\delta = 1$.
(2) $\mathfrak{g}$ の次数分解 $\mathfrak{g} = \sum_{i=-2}^{2} \mathfrak{g}_i$ で $\dim \mathfrak{g}_{\pm 2} = 1$ となるものに対して,[5]

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Sec}\, X(\mathfrak{g}), \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})) = \dim \mathfrak{g}_0 - 1.$$

特に, $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g} \geq 2$ ならば, $\mathrm{Sec}\, X(\mathfrak{g}) \neq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ となる.
(3) 最高ルートベクトル X_+ を含む $\mathfrak{sl}_2$-triple を (X_+, X_-, H) とするとき, 半単純元の軌道 $G \cdot \pi(H)$ は, $\mathrm{Sec}\, X(\mathfrak{g})$ 内で稠密となる:

$$\overline{G \cdot \pi(H)} = \mathrm{Sec}\, X(\mathfrak{g}).$$

[5] さらに, $\mathfrak{g}_1 \neq 0$ ならば接触型次数分解と呼ばれる分解である. ここに, $\mathfrak{g}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rk}\,\mathfrak{g} \geq 2 \Leftrightarrow \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ である.

(4) $u \in \operatorname{Sec} X(\mathfrak{g})$ に関する contact locus を C_u と書くことにする．すなわち，

$$C_u := \overline{\{v \in \operatorname{Sec} X(\mathfrak{g}) | T_u \operatorname{Sec} X(\mathfrak{g}) = T_v \operatorname{Sec} X(\mathfrak{g})\}}$$

とおく．このとき，一般の点 $u \in \operatorname{Sec} X(\mathfrak{g})$ に対しては $\dim C_u = 2$ となる．

一般に，射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して，

$$X^* := \overline{\{H \in \check{\mathbb{P}}^N | H \supseteq T_x X (\exists x \in X)\}}$$

を，X の双対多様体と呼ぶ．ただし，$\check{\mathbb{P}}^N$ は $\mathbb{P}^N$ の双対射影空間，すなわち，$\mathbb{P}^N$ 内の超平面の全体のなす射影空間である．双対多様体 X^* は，次元 $N-1$ の X 上の余法束の像として得られるので，一般の射影多様体に対しては超曲面となることが期待される．次が知られている:

定理B (F. Knop-G. Menzel (1987) [**14**][6]): 随伴多様体 $X(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ の双対多様体は超曲面となる: $\operatorname{codim} X(\mathfrak{g})^* = 1$.

さらにその次数に関しては次の公式がある: Wを Weyl 群，$\widetilde{\alpha}$ を最高ルートとすると

定理C (面田康裕 (2000) [**16**]): $\deg X(\mathfrak{g})^* = \#(W \cdot \widetilde{\alpha})$.

たとえば，F_4, E_6, E_7, E_8 型随伴多様体の双対多様体の次数は，それぞれ 24, 72, 126, 240 となることが従う．

射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して，

$$\operatorname{Tan} X := \bigcup_{x \in X} T_x X \subseteq \mathbb{P}^N$$

を X の tangent variety と呼ぶ．一般に，X が非特異ならば $\operatorname{Tan} X \subseteq \operatorname{Sec} X$ が成り立つ．随伴多様体に関しては，$\operatorname{Sec} X(\mathfrak{g}) = \operatorname{Tan} X(\mathfrak{g})$ となることが示され

[6]Knop-Menzel [**14**] では，随伴多様体だけでなく，一般の等質射影多様体について，その双対多様体の性質が詳細に研究されている．

る.[7] また, 点 $z \in \mathbb{P}^N$ に対して,

$$\Theta_z := \{x \in X | T_x X \ni z\}$$

をX の z に関する tangen locus と呼ぶ.

定理D (K-保倉 (1998) [**11**]): 随伴多様体 の一般の点 $x, y \in X(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ に対して, 次が成り立つ:

$$\Theta_{[x,y]} = \{x, y\}.$$

逆に, tangent variety の 一般の点 $z \in \operatorname{Tan} X(\mathfrak{g})$ に対して, (x, y, z) を $\mathbb{P}\mathfrak{sl}_2$-triple とすれば, 次が成り立つ:

$$\Theta_z = \{x, y\}.$$

ただし, $x, y, z \in \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ に対して, (x, y, z) が $\mathbb{P}\mathfrak{sl}_2$-triple であるとは, ある $\mathfrak{sl}_2$-triple, (X, Y, Z) $(X, Y, Z \in \mathfrak{g})$ が存在して, $\pi(X) = x, \pi(Y) = y, \pi(Z) = z$ となること, とする.

もちろん, 上のいずれの等号においても, 包含関係 $\supseteq$ はほとんど明らかである. 定理の主張の本質は, 逆の包含関係である. Lie環のブラケット積または $\mathfrak{sl}_2$-triple の幾何的特徴づけと考えることができる.

証明においては, 一般の単純 Lie環 $\mathfrak{g}$ の接触型次数分解 $\mathfrak{g} = \sum_{i=-2}^{2} \mathfrak{g}_i$ に対して,

$$V(\mathfrak{g}) := \pi\left(\{x \in \mathfrak{g}_1 | (\operatorname{ad} x)^2 \mathfrak{g}_{-2} = 0, x \neq 0\}\right)$$

により定義される射影多様体 $V(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}_1)$ を考えること, および, その随伴多様体との関係が一つの鍵[8]となる. その関係とは, $X(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}_1) \subseteq V(\mathfrak{g})$ となることであるが, 実は逆の包含関係も成立する:

定理E (K-保倉 (1998) [**11**]): $X(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}_1) = V(\mathfrak{g})$.

射影多様体 $V(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}_1)$ は, H. Freudenthal の例外型Lie環の構成におい

---

[7] これは, $\pi(H) \in T_{\pi(X_+)} X(\mathfrak{g})$ となることと定理A (3) から従う. また, Fulton-Hansen connectedness theorem を用ると, 定理A (1) からも従う.

[8] もう一つの鍵は, 浅野 洋 [1], [2] により導入された $\mathfrak{g}_1$ 上の3重系構造に着目することである.

て現れる等質射影多様体[9]の一般化と見做せるが，ここでは深く触れない (詳細は [**13**] 参照).

さて，G の $\mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ への作用は線型なので，secant line を secant line に移す．ゆえに，G は自然に $\operatorname{Sec} X(\mathfrak{g})$ にも作用する．自然と問題になるのは，その軌道分解である:

定理F (K-保倉 (1999) [**12**]): 随伴多様体 $X(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ に対して，次が成り立つ:

(1) secant variety, $\operatorname{Sec} X(\mathfrak{g})$ は，半単純軌道の射影化 $G \cdot \pi H$ と有限個の巾零軌道の射影化の和に分解される: つまり，有限個の巾零軌道，$\mathcal{O}_0 := \mathcal{O}_{\min}$, $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r \subseteq \mathfrak{g}$ が存在して，次が成り立つ:

$$\operatorname{Sec} X(\mathfrak{g}) = G \cdot \pi H \sqcup \coprod_{i=0}^{r} \pi \mathcal{O}_i.$$

(2) 巾零軌道 $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_r$ は唯一の極大軌道を持つ．したがって，それを $\mathcal{O}_{\max}$ と書くことにすると，任意の巾零軌道 $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ に対して，

$$\pi \mathcal{O} \subseteq \operatorname{Sec} X(\mathfrak{g}) \Leftrightarrow \mathcal{O} \leq \mathcal{O}_{\max}.$$

(3) $\operatorname{codim}(\pi \mathcal{O}_{\max}, \operatorname{Sec} X(\mathfrak{g})) = 1$.

(4) 極大軌道 $\mathcal{O}_{\max}$ は，具体的には次の通り:

$\mathfrak{g}$	$\mathcal{O}_{\max}$
$\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$	$\mathcal{O}_{[2]}$
$\mathfrak{sl}_{n\geq 3}\mathbb{C}$	$\mathcal{O}_{[31^{n-3}]}$
$\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$	$\mathcal{O}_{[2^2 1^{2n-4}]}$
$\mathfrak{so}_{n\geq 6}\mathbb{C}$	$\mathcal{O}_{[3^2 1^{n-6}]}$
$E_{6,7,8}, F_4$	$\mathcal{O}_{A_2}$
G_2	$\mathcal{O}_{G_2(a_1)}$

[9] Freudenthal の幾何学 [**6**] において，symplectic geometry に現れる variety of planes に相当する多様体である．meta-symplectic geometry に現れるのが随伴多様体，projective geometry に現れるのが 前述の Severi多様体である．定理Eの主張は，elliptic geometry に現れる等質射影多様体が Severi多様体の超平面切断として得られる事実のアナロジーと考えられる．

系 (K-保倉 (1999) [**12**]): Sec $X(\mathfrak{g})$ 内の巾零軌道の Hasse 図式は次の通り:

$$
\begin{array}{cccc}
\mathfrak{sl}_2\mathbb{C} & \mathfrak{sl}_3\mathbb{C} & \mathfrak{sl}_{n\geq 4}\mathbb{C} & \mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C} \\
\mathcal{O}^{2}_{[2]} & \mathcal{O}^{6}_{[3]} & \mathcal{O}^{4n-6}_{[31^{n-3}]} & \mathcal{O}^{4n-2}_{[2^2 1^{2n-4}]} \\
 & | & | & | \\
 & \mathcal{O}^{4}_{[21]} & \mathcal{O}^{4n-8}_{[2^2 1^{n-4}]} & \mathcal{O}^{2n}_{[21^{2n-2}]} \\
 & & | & \\
 & & \mathcal{O}^{2n-2}_{[21^{n-2}]} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\mathfrak{so}_7\mathbb{C} \\
\mathcal{O}^{14}_{[3^2 1]} \\
| \\
\mathcal{O}^{12}_{[32^2]} \\
| \\
\mathcal{O}^{10}_{[31^4]} \\
| \\
\mathcal{O}^{8}_{[2^2 1^3]}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{so}_8\mathbb{C} & \\
 & \mathcal{O}^{18}_{[3^2 1^2]} & \\
 & | & \\
 & \mathcal{O}^{16}_{[32^2 1]} & \\
/ & | & \backslash \\
\mathcal{O}^{I,12}_{[2^4]} & \mathcal{O}^{12}_{[31^5]} & \mathcal{O}^{II,12}_{[2^4]} \\
\backslash & | & / \\
 & \mathcal{O}^{10}_{[2^2 1^4]} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{so}_{n\geq 9}\mathbb{C} & \\
 & \mathcal{O}^{4n-14}_{[3^2 1^{n-6}]} & \\
 & | & \\
 & \mathcal{O}^{4n-16}_{[32^2 1^{n-7}]} & \\
/ & & \backslash \\
\mathcal{O}^{2n-4}_{[31^{n-3}]} & & \mathcal{O}^{4n-20}_{[2^4 1^{n-8}]} \\
\backslash & & / \\
 & \mathcal{O}^{2n-6}_{[2^2 1^{n-4}]} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
E_6 & E_7 & E_8 & F_4 & G_2 \\
\mathcal{O}^{42}_{A_2} & \mathcal{O}^{66}_{A_2} & \mathcal{O}^{114}_{A_2} & \mathcal{O}^{30}_{A_2} & \mathcal{O}^{10}_{G_2(a_1)} \\
| & | & | & | & | \\
\mathcal{O}^{40}_{3A_1} & \mathcal{O}^{64}_{(3A_1)'} & \mathcal{O}^{112}_{3A_1} & \mathcal{O}^{28}_{A_1+\tilde{A}_1} & \mathcal{O}^{8}_{\tilde{A}_1} \\
| & | & | & | & | \\
\mathcal{O}^{32}_{2A_1} & \mathcal{O}^{52}_{2A_1} & \mathcal{O}^{92}_{2A_1} & \mathcal{O}^{22}_{\tilde{A}_1} & \mathcal{O}^{6}_{A_1} \\
| & | & | & | & \\
\mathcal{O}^{22}_{A_1} & \mathcal{O}^{34}_{A_1} & \mathcal{O}^{58}_{A_1} & \mathcal{O}^{16}_{A_1} &
\end{array}
$$

ただし, 巾零軌道に対する上の記号は, 古典型についてはその分割型, 例外型については Bala-Carter の記法で書かれている. また, 上付き添え字は, 各軌道の次元である ([**4**],[**5**] 参照).

参考文献

[**1**]. H. Asano, *On triple systems (in Japanese)*, Yokohama City Univ. Ronso, Ser. Natural Sci. **27** (1975), 7–31.

[**2**]. H. Asano, *Symplectic triple systems and simple Lie algebras (in Japanese)*, RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ. **308** (1977), 41–54.
[**3**]. N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4,5 et 6*, Hermann, Paris, 1968.
[**4**]. R. W. Carter, *Finite groups of Lie type–Conjugacy classes and complex characters–*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Chichester, 1993.
[**5**]. D. H. Collingwood, W. M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.
[**6**]. H. Freudenthal, *Lie groups in the foundations of geometry*, Advances in Math. **1** (1964), 145–190.
[**7**]. W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory: A First Course*, Graduate Texts in Math. **129**, Springer-Verlag, New York, 1991.
[**8**]. R. Hartshorne, *Varieties of small codimension in projective space*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 1017–1032.
[**9**]. H. Kaji, *Homogeneous projective varieties with degenerate secants*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 533–545.
[**10**]. H. Kaji, M. Ohno, O. Yasukura, *Adjoint varieties and their secant varieties*, Indag. Math. **10** (1999), 45–57.
[**11**]. H. Kaji, O. Yasukura, *Tangent loci and certain linear sections of adjoint varieties*, Nagoya Math. J. **158** (2000), 63–72.
[**12**]. H. Kaji, O. Yasukura, *Secant varieties of adjoint varieties: orbit decomposition*, J. Algebra **227** (2000), 26–44.
[**13**]. H. Kaji, O. Yasukura, *Projective geometry of Freudenthal's varieties of certain type*, Michigan Math. J. **52** (2004), 515–542.
[**14**]. F. Knop, G. Menzel, *Duale Varietäten von Fahnenvarietäten*, Comment. Math. Helvetici **62** (1987), 38–61.
[**15**]. R. Lazarsfeld and A. Van de Ven, *Topics in the geometry of projective space. Recent work of F. L. Zak*, DMV Sem. 4, Birkhäuser Verlag, Basel and Boston, 1984.
[**16**]. Y. Omoda, *On Freudenthal's geometry and generalized adjoint varieties*, J. Math. Kyoto Univ. **40** (2000), 137–153.
[**17**]. F. Severi, *Intorno ai punti doppi impropri di una superfcie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a suoi punti tripli apparenti*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **15** (1901), 33–51.
[**18**]. A. Terracini, *Sulle* V_k *per cui la varieta degli* S_h $(h+1)$*-seganti ha dimensione minare dell'ordinario*, Rend. Circ. Mat. Palermo (1) **31** (1911), 392–396.
[**19**]. F. L. Zak, *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*, Translations of Math. Monographs, vol. **127**, AMS, Providence, 1993.